Matematiikan perusmetodit I/Sov.

Harjoitus 10, syksy 2009

1. Osoita, että funktio $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, on rajoitettu.

2. Olkoon f jatkuva funktio $[0,1] \to [0,1]$. Osoita, että on olemassa $x_0 \in [0,1]$, jolle $f(x_0) = x_0$.

3. Olkoon $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ,\text{kun } x \neq 0 \\ 0 & ,\text{kun } x = 0 \end{cases}$.
   Tutki onko $f'(0)$ olemassa.

4. Tiedetään, että $f'(x_0)$ on olemassa. Määrä seuraavat raja-arvot

   a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0-h)}{h}$,

   b) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$.

5. Määrää määritelmän avulla
   $f'(x_0)$, kun $f(x) = \frac{1}{x}$ ja $x_0 \neq 0$.

6. Määrää $f'(x)$, kun

   a) $f(x) = (x^2+5)^5(x^3-2)^3$ b) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

   c) $f(x) = \cos(x + \sin x)$ d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

   e) $f(x) = |x-1|$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$