Matematiikan perusmetodit I/soveltajat

Harjoitus 1, syksy 2009

1. Osoita induktion avulla, että

   a) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$,

   b) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$,

   c) $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $q \neq 1$.

   d) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+$.

   e) Osoita induktion avulla, että $n^3 \geq 3n + 3$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 3$.

2. a) Määrää 10-järjestelmän luku 101 binäärilukuna. Määrää binääriluku 1011011 kymmenjärjestelmän lukuna.

   b) x on lukujärjestelmän kantaluku ja $3_x + 4_x = 12_x$. Määrää x.

3. Osoita, että

   a) jos $m, n \in \mathbb{Z}$ ovat parillisia, niin $m + n$ ja mn ovat parillisia.

   b) jos m ja $n \in \mathbb{Z}$ ovat parittomia, niin mn on pariton.

4. Osoita, että $n^3 + n$ on parillinen aina, kun $n \in \mathbb{Z}$.