

## Matematiikan perusmetodit I/soveltajat

### Harjoitus 3, syksy 2009

1. Osoita, että

a) jos  $a > 0$ , niin  $\frac{1}{a} > 0$ ,

b) jos  $0 < a < b$ , niin  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,

c) jos  $r \geq 0$  ja  $x \in \mathbb{R}$ , niin  $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ .

2. Ratkaise yhtälöt

a)  $2 < |x - 3| < 3$ ,

b)  $|x - a| < |x - (a + 1)|$  ( $a \in \mathbb{R}$  vakio),

c)  $||x + 3| - |x - 2| - |x|| \leq 1$ .

3. Määrä  $\mathcal{M}(f)$  ja  $\mathcal{A}(f)$ , kun

a)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,      b)  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ .

4. Olkoot  $f$  ja  $g$  funktioita, joille

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}.$$

Osoita, että  $\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(g)$ . Onko mahdollista määrätä vakioille  $a$  ja  $b$  sellaiset arvot, että  $f = g$ ?

5. Tutki, mitkä seuraavista funktioista ovat bijektioita  $\mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{A}(f)$ . Määrä  $f^{-1} : \mathcal{A}(f) \rightarrow \mathcal{M}(f)$  mikäli mahdollista.

a)  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,      b)  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \geq 0$ ,

c)  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \leq 0$ ,      d)  $f(x) = x|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

e)  $f(x) = x^2 + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,      f)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .