Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 24.9.2009, klo 8-10, Sali M101

1. Jos $A_1 \subset A_2 \subset \mathbf{R}^n$ ovat Lebesgue-mitallisia joukkoja ja $m(A_1) < \infty$, niin todista että

$$m(A_2 \setminus A_1) = m(A_2) - m(A_1).$$

2. Todista, että $A \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen jos ja vain jos

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F)$$

jokaiselle $E \subset A$ ja $F \subset \mathbf{R}^n \setminus A$.

3. Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ on sellainen joukko että $m(\partial A) = 0$, niin näytä että A on Lebesgue-mitallinen. Anna esimerkki Lebesgue-mitallisesta joukosta A, jolle pätee $m(\partial A) > 0$.

4. Oletetaan, että $A \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen joukko ja $m(A) = \infty$. Näytä, että jokaiselle λ, $0 \leq \lambda < \infty$, on olemassa Lebesgue-mitallinen joukko $A_\lambda \subset A$, jolle pätee $m(A_\lambda) = \lambda$.

5. Olkoon

$$A = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}.$$

Näytä, että $m(A) = 0$.