Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 1.10.2009, klo 8-10, Sali M101

1. Todista, että joukko $E \subset \mathbf{R}^n$ on nollamittainen jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset pallot $B(x_i, r_i) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_i| < r_i\}$, $i = 1, 2, ...$, että

$$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \text{ ja } \sum_{i=1}^{\infty} m(B(x_i, r_i)) < \varepsilon.$$

2. Todista, että

$$m(E) = \inf\{m(U) : E \subset U,\ U \text{ avoin}\}$$

jokaiselle $E \subset \mathbf{R}^n$.

3. Todista, että

$$m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakti}\}$$

jokaiselle Lebesgue-mitalliselle $A \subset \mathbf{R}^n$.

4. Todista, että homeomorfismi $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kuvaa Borelin joukot Borelin joukoiksi.

5. Todista, että jatkuva funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kuvaa kompaktit joukot kompakteiksi joukoiksi.

6. Funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on Lipschitz-jatkuva, jos on olemassa vakio L siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq L\ |x - y|$$

kaikille $x, y \in \mathbf{R}^n$.

(a) Todista, että Lipschitz-funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi joukoiksi.

(b) Todista, että Lipschitz-funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kuvaa mitalliset joukot mitallisiksi joukoiksi.

Opastus: Mitallinen joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ voidaan esittää muodossa $B \cup N$, missä B on numeroituvan monen kompaktin joukon yhdiste ja $m(N) = 0$.