**Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 8.10.2009, klo 8-10, Sali M101**

1. Oletetaan, että $A_i$, $i = 1, 2, ....$, ovat pistevieraita mitallisia joukkoja, $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $f : A \to [0, \infty]$ mitallinen funktio. Näytä, että

$$\int_A f \, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, dm.$$

2. Oletetaan, että $f : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen funktio ja että $g : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on funktio, jolle pätee $g(x) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbf{R}^n$. Todista, että $g$ on mitallinen.

3. Oletetaan, että $f, g : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ ovat mitallisia funktioita ja $g = f$ m.k. $\mathbf{R}^n$:ssä. Näytä, että

$$f \in L^p(\mathbf{R}^n) \text{ jos ja vain jos } g \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

ja silloin $||f||_p = ||g||_p$.

4. Näytä, että jos $f \in L^p(A)$, $1 \le p < \infty$, niin $|f| < \infty$ m.k. $A$:ssa.

5. Oletetaan, että $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen joukko, $m(A) < \infty$ ja $f : A \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen funktio. Todista, että $f \in L^p(A)$, $1 \le p < \infty$, jos ja vain jos

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{ip} \, m(\{x \in A : |f(x)| > 2^i\}) < \infty.$$

6. Oletetaan, että $\{x_i\}$ on yksikköpallon $B(0,1)$ numeroituva ja tiheä osajoukko. Määritellään, $f : B(0,1) \to [0, \infty]$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \, |x - x_i|^{-\alpha}.$$

Millä $\alpha$:n arvoilla $f \in L^p(B(0,1))$, $1 \le p < \infty$?

7. Oletetaan, että $1 \le p < r < q < \infty$. Todista, että

$$L^r(\mathbf{R}^n) \subset L^p(\mathbf{R}^n) + L^q(\mathbf{R}^n).$$

Tämä takoittaa sitä, että jokaiselle $f \in L^r(\mathbf{R}^n)$ on olemassa sellaiset funktiot $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ ja $h \in L^q(\mathbf{R}^n)$, että $f = g + h$.