Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 15.10.2009, klo 8-10, Sali M101

1. Oletetaan, että $A \subset \mathbf{R}$ on mitallinen joukko ja $m(A) < \infty$. Todista käyttämättä Hölderin epäyhtälö, että $L^q(A) \subset L^p(A)$, kun $1 \leq p < q < \infty$.

(Opastus: Tutki joukkoa $\{x \in A : |f(x)| < 1\}$.)

2. Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Määritellään $f_i(x) = f(x)$ kun $|f(x)| \leq i$ ja $|x| \leq i$ ja $f_i(x) = 0$ muulloin, $i = 1, 2, ...$ Todista seuraavat väitteet:

(i) $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

(ii) $||f_i||_p \leq ||f||_p$, $i = 1, 2, ...$

(iii) $f_i \to f$ avaruudessa $L^p(\mathbf{R}^n)$ kun $i \to \infty$.

3. Oletetaan, että $\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p \, dm < \infty$ jollain $0 < p < \infty$. Todista, että

$$\lim_{p\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |f|^p \, dm = m(\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}).$$

(Opastus: Tutki joukkoja $\{x \in \mathbf{R}^n : 0 < |f(x)| \leq 1\}$ ja $\{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| > 1\}$. Käytä konvergenssilauseita.)

4. Tutkitaan funktiojono (f_i), missä $f_i : [0, 1] \to \mathbf{R}$, missä $f_i(x) = ix$, jos $x \in [0, \frac{1}{i}]$ ja $f_i(x) = 1$, jos $x \in (\frac{1}{i}, 1]$, $i = 1, 2, ...$

(i) Määritä $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ kaikilla $x \in [0, 1]$.

(ii) Suppeneeko jono $L^p([0, 1])$:ssä, kun $1 \leq p < \infty$?

(iii) Suppeneeko jono $L^\infty([0, 1])$:ssä?

5. Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Todista, että

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} fg \, dm \right| \leq ||f||_p$$

kaikilla $g \in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, $||g||_{p'} = 1$.

6. Oletetaan, että $f_i \to f$ avaruudessa $L^p(\mathbf{R}^n)$ kun $i \to \infty$ ja $1 \leq p \leq \infty$. Todista, että

$$\lim_{i\to\infty} m(\{x \in \mathbf{R}^n : |f_i(x) - f(x)| > \lambda\}) = 0$$

kaikilla $\lambda > 0$.