Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 22.10.2009, klo 8-10, Sali M101

1. Jos $f \in L^1(\mathbf{R^n})$ on sellainen funktio, että

$$\int_A f dm \geq 0$$

jokaiselle mitalliselle $A \subset \mathbf{R^n}$, niin näytä, että $f \geq 0$ m.k $\mathbf{R^n}$:ssä.

2. Oletetaan, että $1 \leq p < r < q < \infty$. Todista, että

$$L^p(\mathbf{R}^n) \cap L^q(\mathbf{R}^n) \subset L^r(\mathbf{R}^n).$$

3. Oletetaan, että $f \in C(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Todista, että

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)|.$$

4. Todista, että jatkuva funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ on tasaisesti jatkuva $\mathbf{R}^n$:n kompakteissa osajoukoissa.

5. Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ on epätyhjä, niin

$$d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}.$$

(i) Näytä, että on olemassa $x_0 \in \overline{A}$ siten, että

$$d(x, A) = |x - x_0|.$$

(ii) Näytä, että $x \in \overline{A}$ jos ja vain jos $d(x, A) = 0$.
(iii) Näytä, että $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
(iv) Näytä, että $\overline{A} = \overline{B}$ jos ja vain jos $d(x, A) = d(x, B)$ kaikille $x \in \mathbf{R}$.

6. (Vaativa) Oletetaan, että $f_i, f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $i = 1, 2, ...,$, $1 \leq p < \infty$ ja että $f_i \to f$ m.k. Todista ,että $||f_i - f||_p \to 0$ jos ja vain jos $||f_i||_p \to ||f||_p$ kun $i \to \infty$.

(Opastus: $2^p(|f|^p + |f_i|^p) - |f - f_i|^p \geq 0$).