Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 29.10.2009, klo 8-10, Sali M101

1. Oletetaan, että $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R^n})$.

(*i*) $Mf(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R^n}$.

(*ii*) $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R^n}$.

(*iii*) $M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R^n}$ ja $\alpha \in \mathbf{R}$.

(*iv*) $M(\tau_y f)(x) = (\tau_y Mf)(x)$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R^n}$, missä $\tau_y f(x) = f(x+y)$.

2. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbf{R^n}$ on avoin ja

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\} \cap B(0, i),$$

$i = 1, 2, ...$ Näytä, että $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$.

3. Oletetaan, että $f : \mathbf{R^n} \to [-\infty, \infty]$. Silloin f on alaspäin puolijatkuva, jos joukko $\{x \in \mathbf{R^n} : f(x) > \lambda\}$ on avoin kaikilla $\lambda \in \mathbf{R}$.

(*i*) Todista, että χ_A on alaspäin puolijatkuva jos ja vain jos A on avoin.

(*ii*) Todista, että jos f_i, $i = 1, 2, ...$, ovat alaspäin puolijatkuvia, niin $\sup_i f_i$ on alaspäin puolijatkuva.

(*iii*) Todista, että f on alaspäin puolijatkuva jos ja vain jos $f(x) \leq \limsup_{y \to x} f(y)$ kaikilla $x \in \mathbf{R^n}$.

4. Mitallinen funktio $f : \mathbf{R^n} \to [-\infty, \infty]$ kuuluu heikkoon $L^p(\mathbf{R^n})$, $1 \leq p < \infty$, jos on olemassa vakio c, $0 \leq c < \infty$, siten että

$$m(\{x \in \mathbf{R^n} : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda^p}$$

kaikilla $\lambda > 0$. Näytä, että $L^p(\mathbf{R^n}) \subseteq$ heikko $L^p(\mathbf{R^n})$ ja heikko $L^p(\mathbf{R^n}) \nsubseteq L^p(\mathbf{R^n})$.

5. Oletetaan, että f ja g kuuluvat heikkoon $L^p(\mathbf{R^n})$ ja määritellään

$$|||f||| = \sup_{\lambda > 0} \lambda \ m(\{x \in \mathbf{R^n} : |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}.$$

Todista:

(*i*) $|||f||| =$ jos ja vain jos $f(x) = 0$ m.k. $x \in \mathbf{R^n}$.

(*ii*) $||||\alpha f||| = |\alpha| \ |||f|||$ kaikilla $\in \mathbf{R}$.

(*iii*) $|||f + g||| \leq 2(|||f||| + |||g|||)$.

(*iv*) Näytä, että kolmioepäyhtälö $|||f + g||| \leq |||f||| + |||g|||$ ei päde.