Moderni reaalianalyysi: harjoitustehtävät 12.11.2009, klo 8-10, Sali M101

1. Määritellään

$$||f|| = \sup m(E)^{\frac{1-p}{p}} \int_E |f| \, dm, \quad p > 1,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien mitallisten joukkojen E, $0 < m(E) < \infty$.

(i) Todista, että $|| \cdot ||$ on normi heikossa $L^p(\mathbf{R^n})$.

(ii) Näytä, että on olemassa vakio c siten, että

$$|||f||| \leq ||f|| \leq c \, |||f|||$$

kaikille $f \in$ heikko $L^p(\mathbf{R^n})$. (Katso tehtävä 5, 29.10.2009).

2. Oletetaan, että $f \in$ heikko $L^p(\mathbf{R^n})$ ja

$$m(\{x \in \mathbf{R^n} : f(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Näytä, että

$$\int_{\mathbf{R^n}} |f|^q \, dm < \infty$$

kaikilla q, $0 < q < p$.

3. $f \in$ (heikko $L^p(\mathbf{R^n})) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R^n})$. Näytä, että $f \in L^q(\mathbf{R^n})$ kaikilla $q > p$.

4. Oletetaan, että $f \in L^p_{loc}(\mathbf{R^n})$.

(i) Näytä, että jokaisella r, $0 < r < \infty$, funktio

$$x \mapsto \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \, dm(y)$$

on jatkuva x:n suhteen.

(ii) Näytä, että jokaisella $x \in \mathbf{R^n}$ funktio

$$r \mapsto \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \, dm(y)$$

on jatkuva r:n suhteen, $0 < r < \infty$.