

## Ryhmäteoria

Harjoitus 10 syksy 2009

1. Tarkastellaan ryhmää  $SL(2, K)$ , missä  $|K| = 4$ . Olkoon  $\omega$  kunnan  $K$  primitiivinen alkio ja olkoon  $B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ . Määrää alkion  $B$  kertaluku ja  $B$ :n konjugaattien lukumäärä ryhmässä  $SL(2, K)$ .
2. Yksinkertainen lasku osoittaa, että  $|SL(2, 3)| = |S_4| = 24$ . Ovatko ryhmät  $SL(2, 3)$  ja  $S_4$  keskenään isomorfiset?
3. Tarkastellaan tehtävän 1. ryhmää  $SL(2, K)$ . Mikä on ryhmän alkion  $C = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix}$  kertaluku?
4. Olkoon  $M$  äärellisen ratkeavan ryhmän  $G$  maksimaalinen aliryhmä. Osoita, että  $[G : M]$  on alkuluvun potenssi.  
(Vihje: Oleta, että  $G$  on kertaluvultaan pienin ryhmä, jolle väite ei pidä paikkaansa. Olkoon  $N$  ryhmän  $G$  minimaalinen normaali aliryhmä. Tutki erikseen tapaukset  $N \leq M$  ja  $N \not\leq M$ .)