

Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

Harjoitus 1, syksy 2009

1. Viidentoista arvan joukossa on kolme, joilla voittoa 10€ ja neljä, joilla voittoa 3€.

Loput arvat ovat tyhjiä. Olkoon X = "Kaksi arpaa ostavan henkilön voittosumma". Laske $E(X)$.

2. Laskettaessa n reaalityön aritmeettinen keskiarvo luvut pyöristetään kokonaisluvuiksi. Oletamme, että pyöristysvirheet ovat riippumattomia ja $\text{Tas}(-1/2, 1/2)$ -jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon X aritmeettisen keskiarvon virhe. Mikä on n :n vähintään oltava, jotta

$$P\{|X| \geq 0,01\} < 0,05?$$

Käytä arviointiin Tšebyševin epäyhtälöä.

3. Osoita, että tapahtumat A_1, A_2, \dots, A_n ovat riippumattomia jos ja vain jos satunnaismuuttujat $\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$ ovat riippumattomia.
4. Osoita, että tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos $\text{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = 0$.
5. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka jakauma on $\text{Tas}(0, 1)$. Laske $E(X^2)$ ja $E(\sin(2\pi X))$.
6. Tasoon piirretään kolmio, jonka kärkinä ovat origo sekä satunnaisesti valitut pisteet $(X, 0)$ ja $(0, Y)$. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat normaalijakaumaa $N(0, 1)$. Laske kolmion pinta-alan odotusarvo.