# Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

## Harjoitus 2, syksy 2009

1. Olkoot $X$ ja $Y$ riippumattomia, odotusarvoinaan $\mu_1$ ja $\mu_2$ sekä variansseinaan $\sigma_1$ ja $\sigma_2$. Lausu näiden avulla
   a) $\mathrm{E}(aX + bY)$, missä $a$ ja $b$ ovat vakiota,
   b) $\mathrm{D}^2(aX + bY)$, missä $a$ ja $b$ ovat vakiota,
   c) $\mathrm{E}\left(\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2\right)$.
2. Määritä satunnaismuuttujan $X$ $p$–fraktiili tapauksissa $p = 0,5$, $p = 0,75$ ja $p = 0,99$, kun
   a) $X \sim \mathrm{Tas}(0, 1)$
   b) $X \sim \exp(2)$
   c) $X \sim \mathrm{N}(1/2, 1/4)$.
3. Olkoon $P(A) = p$. Määritä indikaattorin $1_A$ todennäköisyysgeneroiva funktio ja johda tämän avulla $\mathrm{Bin}(n, p)$–jakauman todennäköisyysgeneroiva funktio.
4. Olkoon $X$ $\mathbb{N}$–arvoinen satunnaismuuttuja ja $G$ sen todennäköisyysgeneroiva funktio.
   a) Määrää $G(0)$ ja $G(1)$.
   b) Lausu $G$:n avulla todennäköisyys sille, että $X$ saa parillisen arvon.
5. Olkoot $X$ ja $Y$ riippumattomia. Johda ehdollinen jakauma

$$P\{X = k | X + Y = n\}, \text{ missä } k = 0, 1, \ldots, n,$$

   kun
   a) $X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$ ja $Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$,
   b) $X, Y \sim \mathrm{Geom}(p)$.
6. (*Jensenin epäyhtälö*) Oletetaan, että derivoituvan funktion $g$ derivaatta on kasvava. Osoita, että jos satunnaismuuttujilla $X$ ja $g(X)$ on odotusarvo, niin

$$g(E(X)) \leq E(g(X)).$$

   **Vihje:** Todista ensin seuraava lemma:
   Jos $g'$ on kasvava, niin, kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$

$$g'(y)(x - y) \leq g(x) - g(y).$$