Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

Harjoitus 3, syksy 2009

1. Linnunradassa on viimeksi räjähtänyt supernova vuosina 1987, 1604, 1572 ja 1054. On arveltu, että räjähdyksiä tapahtuu keskimäärin kerran 300 vuodessa. Oletetaan, että räjähdykset muodostavat Poisson–prosessin. Laske tähän nojautuen todennäköisyys sille, että
   a) tietyssä 60 vuoden jaksossa räjähtää ainakin kaksi supernovaa,
   b) tietyssä 450 vuoden jaksossa ei räjähdä yhtään supernovaa.
2. Kaukopuhelujen saapuminen muodostaa Poisson–prosessin. Tiedämme, että hetkeen $t > 0$ mennessä on saapunut yksi puhelu. Miten jakautuu tämän puhelun saapumishetki T?
   Opastus: Laske $P\{T \le s \mid X([0,t]) = 1\}$, *missä* $0 < s < t$.
3. K:lla on asuntonsa yhteydessä kioski, jossa käy keskimäärin 6 asiakasta tunnissa. Asiakkaan saapumisen ilmoittaa kellonkilahdus. K on päättänyt palvella asiakkaita aina n kilahduksen jälkeen. Millä todennäköisyydellä K ehtii toimittaa 10 minuuttia kestävän askareen yhtäjaksoisesti lepoaikanaan?
4. Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on f, missä
   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}}, \text{ kun } x > 0, \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} cx^5 e^{-2x}, \text{ kun } x > 0, \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$
   Määritä vakio c, jakauman nimi, odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ ja varianssi $\mathrm{D}^2 X$.
5. Määritä $\mathrm{E}(X^{-k})$, kun $X \sim \mathrm{Gamma}(r, \lambda)$ ja $k \in \mathbb{N}_+$. Millä eksponentin k arvoilla odotusarvo on olemassa?
6. Oletetaan, että molekyylin nopeudet x–, y– ja z–koordinaattiakselien suuntaan ovat riippumattomia, $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$–jakautuneita satunnaismuuttujia. Määritä molekyylin vauhdin tiheysfunktio. Tiedoksi: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. *(Maxwell päätyi tähän jakaumaan lähtien siitä olettamuksesta, että kyseisen jakauman on oltava invariantti 3–ulotteisen avaruuden kiertojen suhteen.)*