

Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

Harjoitus 4, syksy 2009

1. Osoita, että $\text{Exp}(\lambda)$ -jakauman karakteristinen funktio on ϕ , missä

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

2. Johda satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio, kun X :llä on jatkuva jakauma tiheysfunktionaan f , missä

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

3. Olkoon $\{X_1, X_2, \dots, X_{10}\}$ otos jakaumasta $\text{Tas}(0, 1)$. Määritä normaaliapproksimaatiolla likiarvo todennäköisyydelle $P\{\sum_{k=1}^{10} X_k > 7\}$.

4. Asiakkaan ostosten summa pyöristetään lähimpään 5 senttiin. Yhden asiakkaan pyöristysvirheestä liikkeenharjoittajalle koitua tappio on satunnaismuuttuja, joka saa arvot $-2, -1, 0, 1, 2$. Kunkin arvon todennäköisyys on $\frac{1}{5}$. Olkoon X 10 000 asiakkaan aiheuttama kokonaistappio. Laske normaaliapproksimaatiolla todennäköisyyden $P\{X > 2\text{€}\}$ kolmidesimaalinen likiarvo.

5. Sarjatuotannossa valmistetaan kahdenlaisia koneen osia; pyöreitä putkia ja ympyrälieriön muotoisia osia. Lieriöiden on tarkoitus mahtua putkien sisälle. Olkoot X lieriön pohjan halkaisija ja Y putken sisäläpimitta. Silloin

$$X \sim N(10,40, 0,03^2) \text{ ja } Y \sim N(10,52, 0,04^2).$$

- a) Valitaan umpimähkään yksi lieriö ja yksi putki. Millä todennäköisyydellä lieriö mahtuu putken sisään?
- b) Valitaan sata kertaa lieriö ja putki. Olkoon N niiden kertojen lukumäärä, joilla lieriö ei mahdu putken sisään. Laske normaaliapproksimaatiolla likiarvo todennäköisyydelle $P\{N \leq 1\}$.
- c) Laske myös todennäköisyys $P\{N \leq 1\}$ arvioiden binomijakaumaa Poisson-jakaumalla.
- d) Vertaa b)- ja c)-kohtien likiarvoja todennäköisyyden $P\{N \leq 1\}$ oikeaan arvoon.
6. Kirjassa on 500 sivua. Eräessä ladontamenetelmässä sattuu tämän kokoiseen kirjaan keskimäärin 1000 painovirhettä.
- a) Laske Poisson-jakauman avulla todennäköisyys sille, että yhdellä sivulla olevien virheiden lukumäärä on pienempi kuin 2.
- b) Olkoon X niiden sivujen lukumäärä, joilla on vähemmän kuin kaksi painovirhettä. Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen likiarvo todennäköisyydelle $P\{X > 215\}$.