

# Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

## Harjoitus 5, syksy 2009

1. Laatikossa on 10 palloa, joista 2 on valkoista ja 3 punaista. Kokeessa nostetaan 3 palloa ilman takaisinpanoa. Olkoot  $X$  valkoisten ja  $Y$  punaisten pallojen lukumäärä otoksessa.
  - a) Johda parin  $(X, Y)$  pistetodennäköisyysfunktio.
  - b) Määritä reunajakaumat.
  - c) Määritä ehdolliset jakaumat.
2. Määritä vakio  $c$  siten, että  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on tiheysfunktio, kun
  - a)  $f(x, y) = \begin{cases} cxy, & \text{kun } 0 < x < 1 \text{ ja } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{muulloin;} \end{cases}$
  - b)  $f(x, y) = \begin{cases} ce^{-x-y}, & \text{kun } 0 < x < y, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$
3. Olkoon satunnaismuuttujaparin  $(X, Y)$  tiheysfunktio  $f$  kuten tehtävässä 2 a). Tutki, ovatko  $X$  ja  $Y$  riippumattomia.
4. Olkoot  $X, Y$  ja  $f$  kuten tehtävässä 2 a). Johda ehdolliset tiheysfunktiot  $f_X(\cdot | Y = y)$  ja  $f_Y(\cdot | X = x)$ .
5. Olkoon  $X$  satunnaismuuttuja, joka noudattaa jakaumaa  $\text{Tas}(0, 1)$ , ja  $Y$  satunnaismuuttuja, jonka jakauma ehdolla  $\{X = x\}$  on  $\text{Tas}(0, x)$ .
  - a) Johda satunnaismuuttujan  $Y$  tiheysfunktio ja laske  $E(Y)$ .
  - b) Johda ehdollinen tiheysfunktio  $f_X(\cdot | Y = y)$  ja laske ehdollinen odotusarvo  $E(X | Y = y)$ .
6. Tason yksikkökiekkoon sijoitetaan umpimähkään ja toisistaan riippumatta  $n$  pistettä. Olkoon  $R$  origoa lähinnä olevan pisteen etäisyys origosta. Johda satunnaismuuttujan  $R$  tiheysfunktio.