

Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

Harjoitus 6, syksy 2009

1. (*Buffonin neulaprobleema*) Paperille, johon on piirretty yhdensuuntaisia suoria etäisyydelle $2a$ toisistaan, pudotetaan neula. Neulan pituus on $2k$, missä $0 < k < a$. Laske todennäköisyys sille, että neula leikkaa suoran.
Opastus: Olkoon X neulan keskipisteen etäisyys lähimmästä suorasta ja Y suuntakulma suorien suhteen. Nyt X ja Y ovat riippumattomia sekä $X \sim \text{Tas}(0, a)$ ja $Y \sim \text{Tas}(0, \pi)$.

2. Oletetaan, että satelliitista saapuva signaali on muotoa $S = X + Y$, missä X on havainto ja Y häiriö (kohina). Oletetaan, että $X \perp Y$, $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ ja $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$. Määritä
 - a) $\text{Corr}(S, X)$,
 - b) Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $S = s$.
(Vihje: Johda ensin satunnaisvektorin (X, S) tiheysfunktio esittämällä (X, S) satunnaisvektorin (U, V) affiinina muunnoksena, missä $(U, V) \sim N(0, I)$.)

3. Olkoon satunnaisvektorilla (X, Y) jatkuva jakauma tiheysfunktionaan f ja olkoon

$$f(x, y) = ce^{-x^2-2y^2} \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

missä $c > 0$ on vakio.

- a) Määrää c .
 - b) Mikä tunnettu jakauma on kyseessä?
 - c) Määrää $E(X)$, $E(Y)$ ja $\text{Corr}(X, Y)$.
4. Olkoon satunnaisvektorilla (X, Y) 2-ulotteinen normaalijakauma tiheysfunktionaan

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \exp\left[-\frac{1}{8}(3x^2 + 2xy + 3y^2 - 14x - 10y + 19)\right] \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Määrää satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ja niiden kovarianssimatriisi.

Vihje: Etsi sellainen vektori z_0 ja sellainen matriisi C , että eksponenttissa oleva lauseke on $-\frac{1}{2}(z - z_0)^T C^{-1}(z - z_0)$, kun $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ja $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

5. Janalle, jonka pituus on a sijoitetaan umpimähkään ja toisistaan riippumatta kaksi pistettä
 - a) Laske todennäköisyys sille, että pisteiden etäisyys on suurempi kuin x , missä $0 < x < a$.
 - b) Laske etäisyyden odotusarvo.