806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I
Harjoitus 10, viikko 47, syksy 2009

1. Eräällä professorilla on tapana jatkaa luentoa vielä varsinaisen päättymisajan jälkeen. Tämän yliajan (=X, min.) on opiskelijoiden tekemien mittausten perusteella todettu noudattavan likimain tasaista jakaumaa välillä 0:sta 10:een.

a) Esitä X:n tiheysfunktio ja kertymäfunktio ja piirrä niiden kuvaajat.

b) Mikä on todennäköisyys, että luento menee yliajalle
b1) korkeintaan kaksi minuuttia, b2) yli kuusi minuuttia ?

c) Laske X:n odotusarvo ja varianssi.

2. Asiakkaiden palveluajan (= X) erään kirjaston infotiskillä on todettu noudattavan likimain eksponenttijakaumaa keskimääräisen palveluajan (= odotusarvon) ollessa 5 minuuttia.

a) Esitä X:n tiheysfunktio ja kertymäfunktio ja piirrä (hahmottele) niiden kuvaajat.

b) Monellako prosentilla infotiskillä asioivista palveluaika kestää
b1) alle 30 sekuntia,
b2) vähintään viisi minuuttia,
b3) kolmesta kymmeneen minuuttia?

c) Mikä on todennäköisyys, että asiakasta, jota on jo palveltu 15 minuuttia, palvellaan vielä yli viisi minuuttia?

d) Määrää palveluajan mediaani ja varianssi.

3. Satunnaismuuttuja $Z \sim N(0,1)$.
Määrää seuraavat todennäköisyydet:

a) $P(Z > 0)$, b) $P(Z \geq 0)$, c) $P(Z > 0.54)$,

d) $P(Z > -2.27)$, e) $P(Z < -1.87)$, f) $P(Z \leq 1.42)$,

g) $P(|Z| > 1.7)$, h) $P(-0.65 \leq Z \leq 0.30)$, i) $P(Z > 3.98)$.

4. Satunnaismuuttuja $Z \sim N(0,1)$.
Määrää z siten, että

a) $P(Z \geq z) = 0.5$, b) $P(Z \geq z) = 0.2643$,

c) $P(Z \leq z) = 0.8729$, d) $P(Z \leq z) = 0.1500$.

5. Satunnaismuuttuja $X \sim N(117, 15^2)$.

a) Määrää seuraavat todennäköisyydet:
a1) $P(X > 120)$, a2) $P(X \geq 95)$, a3) $P(110 \leq X \leq 140)$.

b) Määrää x siten, että
b1) $P(X \geq x) = 0.5$, b2) $P(X \geq x) = 0.30$,
b3) $P(X \leq x) = 0.15$.

6. Osoita, että normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$ noudattavalle satunnaismuuttujalle X on voimassa seuraavat tulokset:

a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$,

b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$,

c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9972$.

7. Tarkastellaan kahta sijoitusvaihtoehtoa A ja B, joihin kumpaankin liittyy epävarmuus tuoton suuruudesta. Oletetaan, että A:n tuottoprosentti ($=X$) noudattaa normaalijakaumaa $N(8, 1.2^2)$ ja B:n tuottoprosentti ($=Y$) noudattaa normaalijakaumaa $N(11, 4.0^2)$. Lisäksi oletetaan, että X ja Y ovat toisistaan riippumattomat.

a) Hahmottele X:n ja Y:n tiheysfunktioiden kuvaajat samaan kuvioon.

b) Mikä on todennäköisyys, että b1) A:n, b2) B:n tuottoprosentti on negatiivinen?

c) Kumpi, A vai B, antaa suuremmalla todennäköisyydellä tuotoksi yli kuusi prosenttia?

d) Mikä on todennäköisyys, että A:n tuottoprosentti on suurempi kuin B:n tuottoprosentti?

8. Erääseen 10 km:n massajuoksuun osallistuneiden (useita tuhansia) juoksuaikojen jakauma oli likimain normaalijakauma odotusarvona (keskiarvona) 61 minuuttia ja keskihajontana 9 minuuttia.

a) Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valitun juoksuun osallistuneen aika oli alle 50 minuuttia?

b) Monellako prosentilla juoksijoista loppuaika oli yli 68 minuuttia?

c) Määrää juoksuajan c1) yläkvartiili, c2) 10 prosentin desiili.

d) Jos valitaan satunnaisesti juoksijoista kymmenen, mikä on todennäköisyys, että ainakin kolmella heistä aika oli yli 68 minuuttia ?