806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I
Harjoitus 1, viikko 38, syksy 2009

Summaoperaattorin Σ käytöstä

Monien tilastollisten tunnuslukujen laskukaavoissa esiintyy mittaustulosten summia. Jotta vältyttäisiin pitkien summalausekkeiden kirjoittamiselta kaavoissa, on otettu käyttöön summaoperaattori Σ (iso sigma), joka määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n \quad .$$

Jos $x_1 = ... = x_n = c=$ vakio, on siis

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + ... + c = n \cdot c \quad .$$

Esimerkkejä:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=5}^{8} y_i = y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$

$$\sum_{i=1}^{5} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sum_{i=4}^{6} 10 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\sum_{j=1}^{3} j = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

Merkinnällä $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ tarkoitetaan summaa $x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn}$

Tulo-operaattorin Π (iso pii) käytöstä:

Mikäli kaavoissa esiintyy mittaustulosten tuloja, voidaan kaavoja lyhentää ja selkeyttää vastaavan tulo-operaattorin Π (iso pii) avulla. Operaattori määritellään seuraavasti:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot ..... \cdot x_n.$$

1. Olkoon $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$ ja $x_5 = 2$ sekä $y_1 = -3$, $y_2 = 0$, $y_3 = -4$, $y_4 = 6$ ja $y_5 = 6$.
Laske seuraavien summien arvot.

a) $\sum_{i=1}^{5} x_i$ b) $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$ c) $(\sum_{i=1}^{5} x_i)^2$ d) $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i$ e) $(\sum_{i=1}^{5} x_i)(\sum_{i=1}^{5} y_i)$

f) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i)$ g) $\sum_{i=1}^{5} (i-5)x_i$ h) $\sum_{i=1}^{5} x_i(y_i - 3)$

i) $\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, missä $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat x:n ja y:n keskiarvot, $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$ ja $\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i$

2. Esitä Σ- merkkiä käyttäen

a) $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ b) $(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$ c) $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$

d) $(x_1 - a) + (2x_2 - 4a) + (3x_3 - 9a) + (4x_4 - 16a)$, a mielivaltainen reaalivakio

e) $\dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_rx_r}{f_1 + f_2 + ... + f_r}$

3. Todista seuraavat summaoperaattorin ominaisuudet (a, b ja c mielivaltaisia reaalivakioita).

a) $\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$ b) $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + c) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i + nc$

c) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

4. Kahden muuttujan (x ja y) arvoista kuudella havaintoyksiköllä on saatu seuraavat summat:
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 24$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 118$, $\sum_{i=1}^{6} x_iy_i = 16$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 6$ ja $\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 64$.
Käytä hyväksi tehtävässä 3 todistettuja summaoperaattorin ominaisuuksia ja laske

a) $\sum_{i=1}^{6} 3x_i$ b) $\sum_{i=1}^{6} (2x_i - 5)$ c) $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$ d) $\sum_{i=1}^{6} (x_i - y_i)^2$

e) $\sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})$ f) $\sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})^2$ g) $\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

5. (jatkoa tehtävään 4)
Myöhemmin havaitaan, että ensimmäisen havaintoyksikön x-arvo ($= x_1$) ei olekaan 4 vaan -2 ja vastaavasti y-arvo ($= y_1$) on 4 eikä -2.
Laske kohdat a) - g) tämän korjauksen jälkeen

6. Esitä summana $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \dfrac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$.

7. a) Esitä Π-merkkiä käyttäen $4x_1 \cdot 4x_2 \cdot ..... \cdot 4x_n$.

b) Laske $\prod_{i=1}^{4} 3^i$.