Analyysi 2
11. harjoitus

1. Laske polun $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t) \text{ kaikilla } t \in [0, 2\pi],$$

pituus.

2. Olkoot x, $y \in \mathbb{R}^n$. Laske polun $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t) = (1 - t)x + ty \text{ kaikilla } t \in [0, 1],$$

pituus.

3. Laske funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2} \text{ kun } x \neq 0 \text{ tai } y \neq 0,$$

integraali pitkin tehtävän 1 polkua.

4. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = |x| + |y| \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

integraali pitkin polkua $\alpha : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \text{ kaikilla } t \in [0, \pi/2].$$

5. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Laske funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (y, 3y^3 - x, z) \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

integraali pitkin polkua $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = (t, 0, t^n) \text{ kaikilla } t \in [0, 1].$$

6. Sinisorsa ui pisteestä $P_1 = (0, 0)$ pisteeseen $P_2 = (1, 1)$ polkua $\alpha_1(t) = (t^2, t)$ pitkin ja silkkiuikku polkua $\alpha_2(t) = (t, t)$ pitkin. Oletetaan, että virtaa kuvaa funktio $f(x, y) = (-\alpha x, 0)$, missä $\alpha > 0$. Kumpi uimari tekee suuremman työn? (Vihje: työ $= -\int_\alpha f \cdot d\alpha$)

Tehtävissä 7-8 käytetään seuraavaa määritelmää: polun $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *vastakkainen polku* $\overleftarrow{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ määritellään asettamalla

$$\overleftarrow{\alpha}(t) = \alpha(b - (t - a)) \text{ kaikilla } t \in [a, b].$$

7. Oletetaan, että $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ on $\mathcal{C}^1$-polku. Osoita, että $l(\alpha) = l(\overleftarrow{\alpha})$.

8. Oletetaan, että integraali $\int_\alpha f \cdot d\alpha$ on olemassa. Osoita, että

$$\int_{\overleftarrow{\alpha}} f \cdot d\overleftarrow{\alpha} = -\int_\alpha f \cdot d\alpha.$$