

Analyysi 2

12. harjoitus

1. Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = y, \\ 1, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

on Riemann-integroituva yli suorakulmion $[0, 1] \times [0, 1]$.

2. Olkoon $R \subset \mathbb{R}^n$ suorakulmio. Oletetaan, että $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ on Riemann-integroituva ja että $f \geq 0$. Osoita, että

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \geq 0.$$

Tehtävissä 3-7 laske

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$$

kun

3. $R = [0, 1] \times [0, 2]$ ja $f(x, y) = e^{2x}$.

4. $R = [0, 1] \times [1, 3]$ ja $f(x, y) = x^2 + y$.

5. $R = [0, t] \times [1, t]$, missä $t > 1$, ja $f(x, y) = y^{-3}e^{tx/y}$.

6. $R = [0, 1] \times [-\pi, \pi]$ ja $f(x, y) = e^{-x^2} \sin(xy)$.

7. $R = [0, 180] \times [1, 180]$ ja $f(x, y) = \max\{x + y, 180\}$.

Lisätehtävä

1. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu ja että kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva, ts. jokaiselle $\varepsilon > 0$ löydetään sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

aina kun $x, y \in A$ ja $|x - y| < \delta$.