Analyysi 2
2. harjoitus

1. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$
Määritä f:n tasa-arvojoukot f_c, kun $c \in \mathbb{R}$. Hahmottele niiden kuvat.

2. Onko joukko $A =]0,1[\times]0,1[$ avoin? Perustele vastauksesi.

3. Onko joukko $A =]0,1[\times]0,1[$ suljettu? Perustele vastauksesi.

4. Onko joukko $A = [0,1] \times [0,1]$ avoin? Perustele vastauksesi.

5. Onko joukko $A = [0,1] \times [0,1]$ suljettu? Perustele vastauksesi.

6. Osoita, että suljettu pallo $\overline{B}(a, R) \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu joukko.

7. Määritä joukon $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ reuna ∂A.

8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\partial(A^C) = \partial A$.

Lisätehtäviä

1. Tarkastellaan kuvausta $f : X \to Y$, missä $X \subset \mathbb{R}^n$ ja $Y \subset \mathbb{R}^m$. Määritellään joukon $B \subset Y$ *alkukuva* kuvauksessa f asettamalla
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$
Osoita, että f on injektio, jos ja vain jos $f^{-1}(f(A)) = A$ jokaiselle $A \subset X$.

2. Osoita, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

3. Määritä kuvauksen $f :]0,1[\to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \text{ kaikilla } 0 < x < 1,$$
graafin kasautumispisteet.