Analyysi 2
4. harjoitus 2010

1. Oletetaan, että kuvauksilla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on raja-arvot pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y) = (x, y, x + y) \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Osoita määritelmää käyttäen, että f on jatkuva.

3. Onko kuvauksella $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

raja-arvo pisteessä $(0, 0)$? Vihje: käytä lausetta 1.4.5 (a).

4. Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovat jatkuvia pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että kuvaus $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$.

5. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva täsmälleen silloin, kun sen jokainen koordinaattifunktio $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, missä $j = 1, \ldots, n$, on jatkuva.

6. Laske kuvauksen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y, z) = xy \sin z \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

osittaisderivaatat.

7. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y),$$

missä $g(x, y) = (x, y)$ ja $h(x, y) = (2x, \sin y)$. Laske funktion f osittaisderivaatat pisteessä $(0, \frac{\pi}{2})$.