Analyysi 2
5. harjoitus 2010

1. Määritä määritelmää käyttäen kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

suunnattu derivaatta vektorin $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ suuntaan pisteessä (x_1, x_2).

2. Oletetaan, että kuvauksilla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on suunnatut derivaatat vektorin $v \in \mathbb{R}^n$ suuntaan pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$\partial_v (f + g)(a) = \partial_v f(a) + \partial_v g(a).$$

Tehtävissä 3 ja 4 tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Osoita, että kuvaus f ei ole jatkuva origossa.

4. Osoita, että kuvauksella f on suunnatut derivaatat jokaiseen suuntaan origossa.

5. Osoita määritelmää 2.1.5 käyttäen, että kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x + y^2 \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

on differentioituva.

6. Määritä tehtävän 5 kuvauksen f tangenttitaso pisteessä $(1, 0, 1)$.

Lisätehtäviä

1. Laske funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y.z) = x^{y^z} \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

kaikki osittaisderivaatat.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että kuvaus $f : A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva joukon A kasautumispisteessä a täsmälleen silloin, kun $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.