Analyysi 2
7. harjoitus

1. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x, xy) \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Onko f derivoituva? Perustele vastauksesi.
(b) Laske derivaatta $f'(1, 2)$.
(c) Laske $(f'(1, 2))(0, 1)$.

2. Olkoon A $m \times n$-matriisi. Määritellään lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ asettamalla $f(x) = Ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että f on derivoituva ja $J_{f,x} = A$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on derivoituva ja että $f'(x) = A$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$, missä A on $m \times n$ -matriisi. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \mathbb{R}^m$, että $f(x) = Ax + c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$.

4. Olkoon $a \in \mathbb{R}^m$. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sellainen kuvaus, että $|f(x) - f(a)| \leq 3|x - a|^4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $f'(a) = 0$.

5. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y)$ derivaatta pisteessä $(0, \pi/2)$, kun $g(x, y) = (x, x)$ ja $h(x, y) = (2x, \sin y)$.

6. Keksi esimerkki sellaisesta reaaliarvoisesta kuvauksesta f, joka ei ole vakiokuvaus ja jonka derivaatta on nolla.