Analyysi 2
9. harjoitus

1. Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on *bi-Lipschitz-kuvaus*, jos on olemassa sellainen $L > 0$, että

$$\tfrac{1}{L}|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että bi-Lipschitz-kuvaus on injektio.

2. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \text{ kaikilla } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

3. kertaluvun osittaisderivaatat.

3. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} (x_2 \sin t + \cos(x_2 t))\, dt \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Laske $\partial_1\partial_2\partial_2 f(x_1, x_2)$.

4. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2^2} \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

2. asteen Taylorin polynomi origossa.

5. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1}x_2 + x_3 \text{ kaikilla } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

2. asteen Taylorin polynomi T_0^2 origossa.

6. Tarkastellaan tehtävän 5 kuvausta f. Arvioi erotusta $|f(x) - T_0^2(x)|$, kun $|x| \leq 1$.

Lisätehtäviä

1. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on $\mathcal{C}^2$-funktio. Osoita, että kaikilla $a, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a)h_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \partial_k\partial_j f(a)h_kh_j + |h|^2\eta(h),$$

missä $\eta(h) \to 0$ kun $h \to 0$.

2. Oletetaan, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lokaali injektio ja jatkuva. Osoita, että f on injektio.