

## Johdatus matemaattiseen päättelyyn

### 3. harjoitus

1. Osoita, että  $\sqrt{3}$  on irrationaaliluku. (Vrt. luentojen esimerkki 1.7 (2), jossa todistetaan, että  $\sqrt{2}$  on irrationaaliluku. Käytä 2. harjoitusten 6. tehtävää.)

2. Muodosta antiteesit seuraaville väitteille:

- (a) Aurinko ei paista ja on sumuista.
- (b) Kaikki luennot ovat hyödyllisiä.
- (c) On olemassa syksyjä, jolloin ei sada eikä metsissä kasva sieniä.
- (d) Kaikki, jotka pitävät matematiikasta, pitävät todistamisesta.

3. Muodosta antiteesit seuraaville väitteille:

- (a) Kaikille  $n \in \mathbb{N}$  pätee  $n^2 \neq 3$ .
- (b) On olemassa sellainen  $n \in \mathbb{N}$ , että  $n^n$  on parillinen.
- (c) On olemassa sellainen  $m \in \mathbb{N}$ , että  $m \leq k$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ .

4. Ovatko seuraavat väitelauseet tosia vai epätosia? Perustele vastauksesi.

- (a) Jos  $x$  on irrationaaliluku, niin  $x^2 + 1$  on irrationaaliluku.
- (b) Jos  $n$  ja  $m$  ovat luonnollisia lukuja, niin  $n - m$  on luonnollinen luku.
- (c) On olemassa sellainen  $n \in \mathbb{N}$ , että  $n \leq k$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ .

5. Kirjoita seuraavien summien termit:

$$(a) \sum_{i=3}^4 2^{-2i} \quad (b) \sum_{i=1}^p \frac{1}{i} \quad (c) \sum_{k=1}^m (x_k)^2 \quad (d) \sum_{l=1}^L (x_i)^l$$

6. Todista induktioperiaatetta käyttäen, että

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \text{ kaikilla } n = 1, 2, \dots$$

8. Todista induktioperiaatetta käyttäen, että

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ kaikilla } n = 1, 2, \dots$$