Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -\frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:

1° Epäjatkuvuuskohdat:

Polynomifunktiona f jatkuva muualla paitsi ehkä kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$.

Jatkuvuus kohdassa $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 + x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{x}{2} = 0 \\ f(0) = \frac{-0}{2} = 0 \end{array}\right\} f \text{ on jatkuva kohdassa } x = 0.$$

Jatkuvuus kohdassa $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} -\frac{x}{2} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4x + 2 = -2 \\ f(2) = \frac{-2}{2} = -1 \end{array}\right\} f \text{ ei ole jatkuva kohdassa } x = 2.$$

(mahd. paik. ääriarvokohta)

2° Epäderivoituvuuskohdat:

Polynomifunktiona derivoituva muualla paitsi ehkä kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 2x - 4, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

Derivoituvuus kohdassa $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} f \text{ ei ole derivoituva kohdassa } x = 0.$$

(mahd. paik. ääriarvokohta)

Derivoituvuus kohdassa $x = 2$:

Ei ole jatkuva => ei ole derivoituva.

3° **Derivaatan nollakohdat:**

$x < 0$: $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in]-\infty, 0[$
$0 < x < 2$: $f'(x) = -\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$ ei ratkaisua
$x > 2$: $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \notin]2, 4[$

Derivaattafunktion $f'(x)$ ainoa nollakohta on siis $x = -\frac{1}{2}$.
(mahd. paik. ääriarvokohta)

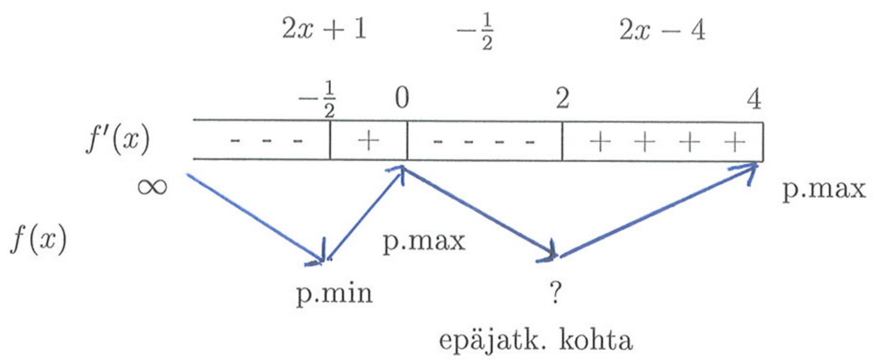
4° **Välin päätepisteet:**

$x = 4$

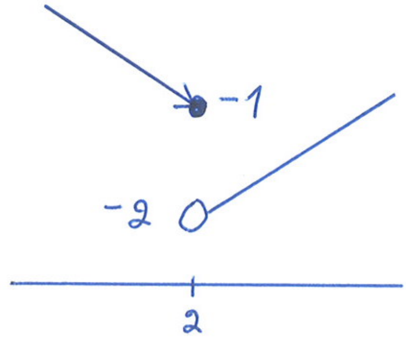
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 + x = \infty$

Ääriarvon olemassaolo ja laatu:

Derivaatan merkkikaavio:



Epäjatkuvuuskohta $x = 2$:



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} -\tfrac{x}{2} = -1$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 - 4x + 2 = -2$$
$$f(2) = \tfrac{-2}{2} = -1$$

$=>$ $x = 2$ ei paik. minimikohta vaan $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -2$ on funktion arvon alaraja.

Loppupäättely

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ on paikallinen minimi

$f(0) = \frac{-0}{2} = 0$ on paikallinen maksimi

$f(2) = \frac{-2}{2} = -1$ ei ole paikallinen ääriarvo

$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 2 = 2$ on paikallinen maksimi

Koska $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, ei ole absoluuttista maksimia.

Koska $\lim_{x \to 2+} f(x) = -2$ on alaraja, niin ei ole absoluuttista minimiä.