Olkoon

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{kun } x\in\mathbb{Q} \\ -x, & \text{kun } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Missä pisteissä f jatkuva?

1° Osoitetaan, että f on jatkuva pisteessä $x=0$:
Olkoon $\varepsilon>0$ mielivaltainen. On löydettävä sellainen $\delta>0$, että $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ aina, kun $|x-0|<\delta$. Itseisarvo

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)-0|=|f(x)|=\begin{cases} |x|, \text{ kun } x\in\mathbb{Q} \\ |-x|=|x|, \text{ kun } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Olkoot $\delta>0$ ja $|x-0|<\delta$ eli $|x|<\delta$. Täten $|f(x)-f(0)|=|x|<\delta\leq\varepsilon$, kun $\delta\leq\varepsilon$. Nyt voidaan valita $\delta=\varepsilon$. Siispä funktio f on jatkuva pisteessä $x=0$.

2° Osoitetaan, että f ei ole jatkuva muissa pisteissä:
Olkoon $x_0\neq 0$. Jos f on jatkuva pisteesssä x_0, niin jokaisella $\varepsilon>0$ on olemassa sellainen $\delta>0$, että $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ aina, kun $|x-x_0|<\delta$ ($x\in B_\delta(x_0)$). Valitaan $\varepsilon=|x_0|$.

a) Jos x_0 on rationaaliluku, niin on olemassa sellainen irrationaaliluku $a\in B_\delta(x_0)\cap B_\varepsilon(x_0)$, että

$$|f(a)-f(x_0)|=|-a-x_0|=|a+x_0|=|a-x_0+2x_0|\overbrace{\geq}^{\triangle-\text{ey}}|\underbrace{|a-x_0|}_{<\varepsilon}-2\underbrace{|x_0|}_{=\varepsilon}|$$

$$=2\varepsilon-\underbrace{|a-x_0|}_{<\varepsilon}>\varepsilon.$$

Näin f ei ole jatkuva nollasta eroavissa rationaalipisteissä.

b) Jos x_0 on irrationaaliluku, niin on olemassa sellainen rationaaliluku $b\in B_\delta(x_0)\cap B_\varepsilon(x_0)$, että

$$|f(b)-f(x_0)|=|b+x_0|=|b-x_0+2x_0|\overbrace{\geq}^{\triangle-\text{ey}}|\underbrace{|b-x_0|}_{<\varepsilon}-2\underbrace{|x_0|}_{=\varepsilon}|=2\varepsilon-\underbrace{|b-x_0|}_{<\varepsilon}>\varepsilon.$$

Näin f ei ole jatkuva irrationaalipisteissä.

Edellä olevan nojalla f ei ole jatkuva missään pisteessä $x_0\neq 0$.