

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 10 syksy 2010

A osa:

1. Määrää raja-arvo (mikäli raja-arvo on olemassa)

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$, d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ ($a, b \neq 0$).

2. Osoita, että yhtälöllä $10x^3 + 4x^2 - 7 = 0$ on tarkalleen yksi positiivinen juuri.
3. Käytettävissä on 100 metriä aitaa sekä pitkä suora muuri, jota voidaan käyttää osana aitausta. Rakenna mahdollisimman suuri aitaus, kun muuri ja aita muodostavat yhdessä suorakulmion.
4. Valmistetaan tasapaksusta aineesta astia (lieriö), jonka pohja on neliö ja tilavuus 1. Astiaan tehdään kansi kalliimmasta materiaalista, jonka hinta on 15-kertainen pinta-alayksikköä kohden verrattuna muuhun osaan. Määrää astian mitat, kun materiaalikulut on saatava mahdollisimman pieniksi.
5. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ x^2 - x - 3, & -1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 8, & x > 3 \end{cases}.$$

Etsi funktion f paikalliset ja absoluuttiset ääriarvot.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 10 syksy 2010

B osa:

1. Määrää raja-arvo (mikäli raja-arvo on olemassa)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos^2 x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos 7x - 1)}{x^2}.$$

2. Määrää ne positiiviset reaaliluvut a , joilla yhtälöllä $x + a \sin x - 2 = 0$ on ratkaisu välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Tutki, miten yhtälön $x^3 - 3ax^2 + 2 = 0$ reaalisten ratkaisujen lukumäärä riippuu vakiosta $a \geq 0$.
4. Osoita, että funktio $f(x) = x^2$ on alaspäin kupera suoraan määritelmään perustuen.
5. Funktio $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot: $f(1) = 1$ ja

$$|xf(x) - yf(y)| \leq |x - y|^2 \quad \forall x > 0, y > 0.$$

Määrää funktio f .

6. Kahdesti derivoituva funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$f(x) - f(y) = f'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Määrää funktio f .

Lisätehtävä (Jos on aikaa ja viitseliäisyyttä, niin tämän voi tehdä):

7. Käytettävissä on 100 metriä aitaa sekä pitkä suora muuri, jota voidaan käyttää osana aitausta. Rakenna mahdollisimman suuri aitaus, kun aita on osa jonkin ympyrän kehää.