

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 11 syksy 2010

A osa:

1. Olkoon $f(x) = x^7 + 2x^5 - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Osoita, että $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa.
 - b) Laske $(f^{-1})'(0)$.
2. Olkoon $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Osoita, että $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa.
 - b) Laske $(f^{-1})'(2\pi)$.
3. Määrä raja-arvot
 - a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+1}{2x})^x$,
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.
4. Derivoi $f(x)$, kun $f(x)$ on
 - a) $x \ln x - x$, b) $x^5 \ln x$, c) $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$, d) e^{e^x} , e) 2^{x^2-1} , f) $(\ln x)^{\ln x}$,
 - g) $x^{\sin x}$, h) $(\arccos x)^2$, i) $\arcsin \frac{1}{x}$, j) $\arctan \sqrt{e^x - 1}$.
5. Integroi
 - a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, b) $\int x(\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x}) dx$, c) $\int (1 - \frac{1}{x})^2 dx$,
 - d) $\int \frac{1}{2x+3} dx$, e) $\int \frac{x^2}{3+x} dx$, f) $\int \frac{x}{x^2+8} dx$, g) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$,
 - h) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}}$, i) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$, j) $\int (e^{5x} - \sqrt{e^x}) dx$.
6. Integroi
 - a) $\int \cos 6x dx$, b) $\int \sin(4x+1) dx$, c) $\int \cos^6 x \sin x dx$, d) $\int \sin^2 x dx$,
 - e) $\int \cos^3 x dx$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 11 syksy 2010

B osa:

1. Funktio $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ja funktio $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
 - a) Osoita, että $D \sinh x = \cosh x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$, on käänteisfunktio $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x$.
 - c) Määrä funktion $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x$ derivaatta.
(Laske ensin $\cosh^2 y - \sinh^2 y$ ja käytä tulosta derivaatan määrittämiseen.)
2. Määrä raja-arvot
 - a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln x - \ln(x+1)]$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$.
3. Derivoi
 - a) $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{\sqrt{x(x+2)}}$, b) $f(x) = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$.
4. Integroi
 - a) $\int \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$, b) $\int \frac{x^3-x}{x^2+1} dx$, c) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+1} dx$,
d) $\int \sin^5 x dx$, e) $\int \cos^4 x dx$.
5. Olkoon $f(x) = x - \arctan(\tan x)$, $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Laske $f'(x)$ ja piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja.
6. Olkoon $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$. Laske $f'(x)$ ja piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja.