

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Harjoitus 3 syksy 2010

### A osa:

1. Olkoot  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$  ja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 1$ . Määää funktiot  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  ja  $g \circ g$ .
2. Olkoot  $f$  ja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktioita. Mitä voidaan sanoa yhdistetyn funktion  $g \circ f$  kasvavuudesta ja vähenevyydestä, kun
  - a)  $f$  ja  $g$  ovat kasvavia, b)  $f$  ja  $g$  ovat väheneviä,
  - c)  $f$  on kasvava ja  $g$  on vähenevä, d)  $f$  on vähenevä ja  $g$  on kasvava.
3. Olkoot  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektio ja  $g(x) = 7f(x) + 8$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Osoita, että  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on bijektio.
4. Määää  $\sin x$  ja  $\cos x$ , kun  $x$  on
  - a)  $n \cdot \frac{\pi}{4}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ,
  - b)  $n \cdot \frac{\pi}{3}$ ,  $n = 1, 2, 4, 5$ ,
  - c)  $n \cdot \frac{\pi}{6}$ ,  $n = 1, 5, 7, 11$ .
5. Olkoot  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  ja  $\sin x = \frac{4}{5}$ . Määää
  - a)  $\sin 2x$ , b)  $\cos 2x$ , c)  $\tan 2x$ .
6. Osoita, että
  - a)  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ , kun  $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$ ,
  - b)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$  kaikilla  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Harjoitus 3 syksy 2010

### B osa:

1. Olkoot  $f$  ja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktioita. Mitä voidaan sanoa yhdistetyn funktion  $g \circ f$  parillisuudesta ja parittomuudesta, kun
  - a)  $f$  ja  $g$  ovat parillisia, b)  $f$  ja  $g$  ovat parittomia,
  - c)  $f$  on parillinen ja  $g$  on pariton, d)  $f$  on pariton ja  $g$  on parillinen.
2. Olkoot  $f(x) = \sqrt{x+1}$  ja  $g(x) = x^2 - 1$ . Määrä  $(f \circ g)(x)$  ja  $(g \circ f)(x)$  sekä määrittäsjoukot  $D_{f \circ g}$  ja  $D_{g \circ f}$ . Ratkaise yhtälö  $(f \circ g)(x) = g(x)$ .
3. Bijektio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa yhtälön  $f(f^{-1}(x) + x) = f(2x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Määrä funktio  $f$ .
4. Olkoot  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Osoita:
  - a) Jos  $(f \circ g)(x) = x$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ , niin  $f$  on surjektio.
  - b) Jos  $(g \circ f)(x) = x$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ , niin  $f$  on injektio.
  - c) Jos edellisten kohtien molemmat ehdot ovat voimassa, niin  $f^{-1} = g$ .
5. Laske  $\sin \frac{x}{2}$ , kun  $\tan x = \frac{12}{5}$  ja  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .
6. Osoita, että  $\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$ , kun  $\alpha \neq n\pi$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$ .
7. Määrä  $\sin(x+y)$ , kun  $\sin x = \frac{3}{5}$ ,  $\cos y = \frac{7}{25}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$ ,  $x \notin [0, \frac{\pi}{2}]$  ja  $y \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ .