

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 4 syksy 2010

A osa:

1. Määrää kaikki x :n arvot, kun

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$, b) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, c) $\tan x = -1$,

d) $\cos 4x = -1$, e) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, f) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Ratkaise yhtälöt

a) $\cos x = \sqrt{3} \sin x$, b) $\cos 7x = \cos x$, c) $\sin 5x = \sin 3x$,

d) $\sin 3x = \cos x$, e) $\sin 2x = \cos 3x$.

3. Laske

a) $\arcsin(\frac{1}{2})$, b) $\arcsin(-\frac{1}{2})$, c) $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, d) $\arccos(\frac{1}{2})$

e) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, f) $\arctan(-1)$, g) $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$, h) $\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$.

4. Esitä kompleksiluvut muodossa $x + yi$

a) $(1 + 2i)(1 - 3i)$, b) $(2 - 4i)(2 - 5i)$, c) $\frac{1+i}{5+2i}$, d) $\frac{1+2i}{4-i}$,

e) $(1 + 2i)^2$, f) $(1 + 2i)^{-2}$.

5. Määrää reaali- ja imaginaariosat, kun

a) $z = i(2 + 3i)(1 - 2i)$, b) $z = \frac{1-4i}{2+i}$.

6. Määrää kompleksilukujen $\frac{1+i}{4+3i}$ ja $\cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, itseisarvot.

7. Osoita, että kompleksiluvulle z pätee

a) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, b) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

8. Osoita, että kompleksiluvuille z ja w pätee

a) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$, b) $|zw| = |z||w|$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 4 syksy 2010

B osa:

1. Ratkaise yhtälöt a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$, b) $\cos 2x = 2 \cos x - 1$,
c) $\sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x = 0$.
2. Ratkaise yhtälöt
a) $\tan x = 2 \sin x$, b) $1 + \sin 3x = (\sin x + \cos x)^2$,
c) $2 \sin^2 x = 1 - \sin(x + \frac{\pi}{3})$.
3. Millä reaaliluvun x arvoilla lauseke $\frac{z^2}{z-6i}$ on reaalinen, kun $z = x + 3i$?
4. Laske
a) $\sin(\arccos \frac{4}{5})$, b) $\sin(\arctan 3)$.
5. Ratkaise epäyhtälö
a) $\frac{2}{|2 \sin x + 1|} < 1$, b) $\sin x > \cos 2x$ c) $\cos 2x - \tan x > 1$.