Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 5 syksy 2010

A osa:

1. Ratkaise kompleksiset yhtälöt

   a) $z^3 + z = 0$, b) $|z + \frac{1}{z}| = 0$, c) $z + \bar{z} = 5$, d) $2z - 3\bar{z} = 1 - 2i$.

2. Määrää kompleksiluvun z polaariesitys, kun

   a) $z = 5$, b) $z = -7i$, c) $z = -2-2i$, d) $z = \sqrt{3}+i$, e) $-\sqrt{3}+3i$, f) $z = -\sqrt{3} - i$, g) $z = 1 - i$.

3. Laske

   a) $(\sqrt{3} + i)^{30}$, b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{321}$, c) $(-\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^{52}$.

4. Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ reaalikertoiminen polynomi. Osoita: Jos $z \in \mathbb{C}$ on polynomin $P(x)$ nollakohta, niin myös $\bar{z}$ on $P(x)$:n nollakohta.

5. Polynomin $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 36x - 20$ yksi nollakohta on $2i$. Jaa $P(x)$ tekijöihin

   a) kunnassa $\mathbb{R}$, b) kunnassa $\mathbb{C}$.

6. Olkoot $z_1 = i$, $z_2 = 2 + i$ ja $z_3 = -3$. Määrää sellainen alinta astetta oleva

   a) reaalikertoiminen polynomi, jonka nollakohtia ovat z_1, z_2 ja z_3.

   b) kompleksikertoiminen polynomi, jonka nollakohtia ovat z_1, z_2 ja z_3.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 5   syksy 2010
B osa:

1. Ratkaise

   a) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0.$, b) $2z + |z| = i$, c) $|\bar{z} + iz| < 2$.

2. Tutki, mitä esittää kompleksitasossa joukko ($z = x + iy$)

   a) $z = \frac{2+i}{2-i}\bar{z}$, b) $|x - 2 + (y-1)i| \leq 3$.

3. Esitä $\sin 3\alpha$ ja $\cos 3\alpha$ lausekkeiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ avulla. (Vihje: Tarkastele kompleksilukua z^3, missä $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$.)

4. Ratkaise polaariesitysten avulla yhtälöt (ratkaisut muodossa $x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$)

   a) $z^3 = -1$ b) $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

5. Ratkaise polaariesitysten avulla yhtälöt (ratkaisut polaariesityksinä)

   a) $z^3 = -1 + i$ b) $z^5 = 1$.

6. Anna edellisen tehtävän a)-kohdan ratkaisut muodossa $x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Olkoot $z_1, z_2, \ldots, z_n$ yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$. Osoita, että $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.