Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 6 syksy 2010

A osa:

Laskusääntöjä: $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ ja $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

1. Ratkaise yhtälö

   a) $e^{-2x+1} = 2$, b) $\log_2(\log_2 x) = -1$, c) $\log_{10}(x^2-1) = 1+\log_{10}(x-1)$,
   d) $\ln\sqrt{x-1}+\ln\sqrt{2x-1} = \ln\sqrt{3}$, e) $2^{x^2} = 3^{2x}$, f) $\log_2 2x = \log_4 3x$.

2. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$. Osoita, että f on pariton funktio.

3. Osoita tarkasti (funktion raja-arvon määritelmään perustuen), että

   a) $\lim\limits_{x\to 2}(11x-18) = 4$, b) $\lim\limits_{x\to -5}(-3x+1) = 16$.

4. Olkoot $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $c \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = ca$.

5. Olkoon $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a < 0$. Osoita, että on olemassa sellainen aito ympäristö $B'_\delta(x_0)$, että $f(x) < \frac{a}{2} < 0$ aina, kun $x \in B'_\delta(x_0)$.

6. Laske raja-arvot

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{3}}{x^2+2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{(1+x)^3-1}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5})$.

7. Laske raja-arvot

   a) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-4x-5}$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$, d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^6-1}$.

8. Laske raja-arvot

   a) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{|x|-2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$,

   d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, kun $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ kaikilla $x \in [-1,1]$.

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 6 syksy 2010
B osa:

1. Ratkaise epäyhtälö

   a) $2 \cdot 4^x - 2^x > 1$, b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) + 2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x-4)$,
   c) $\log_{\frac{1}{2}} 2x < \log_2 7$, d) $2^{x^2} < 3^{2x}$.

2. Osoita tarkasti (funktion raja-arvon määritelmään perustuen), että

   a) $\lim_{x \to -2} x^2 = 4$, b) $\lim_{x \to 3} 2x^2 - 5x - 8 = -5$.

3. Olkoot $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \neq 0$. Osoita, että

   a) $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$, b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

   (Vihje: Lause 4.2.2, osan A tehtävä 5 ja Lauseen 4.2.3 kohta (ii) oletetaan tunnetuiksi.)

4. Osoita, että jos jokaisella $\varepsilon > 0$ reaaliluku $a < \varepsilon$, niin $a \leq 0$.

5. Olkoot $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Osoita, että jos $f(x) \leq g(x)$ x_0:n jossakin aidossa ympäristössä, niin $a \leq b$.

6. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x \to 0} \frac{|x-2|+|x+2|}{|x^2-4|}$, b) $\lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{2x}}{x^2-4}$, c) $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}})$, d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$.