

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Harjoitus 8 syksy 2010

### A osa:

1. Määrää sellainen luku  $a \in \mathbb{R}$ , että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x \leq 2 \\ 2x + a, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva.

2. Määrää sellaiset luvut  $a, b \in \mathbb{R}$ , että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kun } x < 0 \\ b, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{\tan(ax)}{bx}, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä 0.

3. Osoita, että yhtälöllä  $x^7 + x + 1 = 0$  on ainakin yksi reaalijuuri.
4. Osoita, että yhtälöllä  $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$  on yksi negatiivinen ja kaksi positiivista ratkaisua.
5. Tutki, onko yhtälöllä  $x^3 - x^2 + 2x - 3 = |x - 2|$  yhtään reaalista ratkaisua.
6. Osoita, että yhtälöllä  $2x = \cos x$  on ratkaisu  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
7. Osoita, että jatkuvalla funktiolla  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  on kiintopiste ts. sellainen  $x_0 \in [0, 1]$ , että  $f(x_0) = x_0$ .
8. Olkoon  $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ . Määrää  $f'(2)$  suoraan derivaatan määritelmään nojaten.
9. Olkoon  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ . Määrää  $f'(5)$  suoraan derivaatan määritelmään nojaten.

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Harjoitus 8 syksy 2010

### B osa:

1. Olkoon  $f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ . Voidaanko  $f(0)$  määritellä niin, että  $f$  on jatkuva pisteessä 0?

2. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio, joka toteuttaa ehdon

$$|f(x) - x| \leq 1$$

aina, kun  $x \in \mathbb{R}$ . Osoita, että funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta (vihje: käytä Bolzanon lausetta).

3. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio, joka toteuttaa ehdon

$$|(f(x))^3 + x + 2| < 1$$

aina, kun  $x \in \mathbb{R}$ . Osoita, että funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta.

4. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ x - 1, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Osoita, että  $f(x)$  on jatkuva pisteessä  $x = \frac{3}{2}$ .

5. Oletetaan, että pisteen  $x = 0$  eräässä ympäristössä

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2.$$

Määrää  $f(0)$ . Osoita, että  $f$  on derivoituva pisteessä  $x = 0$ , ja laske  $f'(0)$ .

6. Oletetaan, että pisteen  $x = 0$  eräässä ympäristössä

$$2 \cos x \leq f(x) \leq 2 + x^2.$$

Määrää  $f(0)$ . Osoita, että  $f$  on derivoituva pisteessä  $x = 0$ , ja laske  $f'(0)$ .

7. Oletetaan, että  $f'(a)$  on olemassa. Määrää

$$\text{a) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}.$$