Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 9 syksy 2010

A osa:

1. Onko $f'(1)$ olemassa, kun

   a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \le 1 \\ 2x-1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & \text{kun } x \ge 1 \\ 4x-3, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$.

2. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \ge 1 \\ \frac{2x^3}{3}, & \text{kun } x < 1 \end{cases}.$$
   Määrää $f'(x)$, kun $x \ne 1$ ja $\lim\limits_{x \longrightarrow 1-} f'(x)$ sekä $\lim\limits_{x \longrightarrow 1+} f'(x)$. Tutki, onko f jatkuva pisteessä $x = 1$ ja onko $f'(1)$ olemassa?

3. Osoita derivaatan määritelmään nojaten, että
$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
   kun $x > 0$.

4. Olkoon funktio $f(x)$ derivoituva pisteessä x_0. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $(cf)(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

5. Määrää käyrän $y = x^2$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(1, 0)$ kautta.

6. Derivoi $f(x)$, kun $f(x)$ on

   a) $(x-1)(x+x^3)$, b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$, c) $x^3 \sin x \cos x$, d) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$, e) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.

7. Mikä on funktion $f(x) = x^2$ muuttujan lisäystä $\Delta x = \frac{1}{10}$ vastaava differentiaali $df(x)$ kohdassa $x = 2$? Mikä on tällöin Δf?

8. Osoita, että yhtälöllä $10x^4 - 6x + 1 = 0$ on juuri välillä $[0, 1]$. (Opastus: tarkastele funktiota $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + x$ ja sovella Rollen lausetta.)

9. Osoita Lagrangen väliarvolauseen avulla, että
$$\frac{\pi}{60} < \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{2}\pi}{60}.$$

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 9 syksy 2010
B osa:

1. Olkoon $f(x) = \frac{\sin|x|}{2+\cos x}$. Tutki, onko $f'(0)$ olemassa.

2. Määrää sellaiset vakiot a ja b, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{kun } x > 1 \\ 3x^2+4, & \text{kun } x \leq 1 \end{cases}$$
on derivoituva pisteessä $x = 1$.

3. Osoita derivaatan määritelmään nojaten, että $D(x^3+2x-3) = 3x^2+2$.

4. Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ derivoituvia pisteessä x_0 sekä $g(x_0) \neq 0$. Osoita, että

   a) funktio $(\frac{1}{g})(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja
$$(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

   b) funktio $(\frac{f}{g})(x)$ on derivoituva pisteessä x_0 ja
$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

   (Vihje: käytä edellistä kohtaa ja tulon derivoimisääntöä hyväksi.)

5. Olkoon f derivoituva funktio, jolla $0 \leq f'(x) \leq 2$ aina, kun $x \in [0,2]$. Olkoon lisäksi $f(0) = 1$ ja $f(2) = 4$. Osoita, että $2 \leq f(1) \leq 3$.

6. Osoita Lagrangen väliarvolauseen avulla, että

   a) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \forall x > 0$.

   b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.