

806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I

Harjoitus 1, viikko 37, syksy 2010

Summaoperaattorin Σ käytöstä

Monien tilastollisten tunnuslukujen laskukaavoissa esiintyy mittaustulosten summia. Jotta välttyttäisiin pitkien summalausekkeiden kirjoittamiselta kaavoissa, on otettu käyttöön summaoperaattori Σ (iso sigma), joka määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \quad .$$

Jos $x_1 = \dots = x_n = c =$ vakio, on siis

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = n \cdot c \quad .$$

Esimerkkejä:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=5}^8 y_i = y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$

$$\sum_{i=1}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sum_{i=4}^6 10 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\sum_{j=1}^3 j = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{k=1}^4 k \cdot x_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

Merkinnällä $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ tarkoitetaan summaa $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$

Tulo-operaattorin Π (iso pii) käytöstä:

Mikäli kaavoissa esiintyy mittaustulosten tuloja, voidaan kaavoja lyhentää ja selkeyttää vastaavan tulo-operaattorin Π (iso pii) avulla. Operaattori määritellään seuraavasti:

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

1. Olkoon $x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 5, x_4 = 7$ ja $x_5 = 2$ sekä $y_1 = -3, y_2 = 0, y_3 = -4, y_4 = 6$ ja $y_5 = 6$.

Laske seuraavat summat:

a) $\sum_{i=1}^5 x_i$ b) $\sum_{i=1}^5 x_i^2$ c) $(\sum_{i=1}^5 x_i)^2$ d) $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$ e) $(\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 y_i)$
 f) $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i)$ g) $\sum_{i=1}^5 (i - 5)x_i$ h) $\sum_{i=1}^5 x_i(y_i - 3)$
 i) $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, missä \bar{x} ja \bar{y} ovat x :n ja y :n keskiarvot, $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$ ja $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i$

2. Esitä Σ -merkkiä käyttäen

a) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ b) $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$ c) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$
 d) $(x_1 - a) + (2x_2 - 4a) + (3x_3 - 9a) + (4x_4 - 16a)$, a mielivaltainen reaaliluvko
 e) $\frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_r x_r}{f_1 + f_2 + \dots + f_r}$

3. Todista seuraavat summaoperaattorin ominaisuudet (a, b ja c mielivaltaisia reaaliluvkoita).

a) $\sum_{i=1}^n c x_i = c \sum_{i=1}^n x_i$ b) $\sum_{i=1}^n (a x_i + b y_i + c) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + n c$
 c) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

4. Kahden muuttujan (x ja y) arvoista kuudella havaintoyksiköllä on saatu seuraavat summat:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 24, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 118, \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 6 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 64.$$

Käytä hyväksi tehtävässä 3 todistettuja summaoperaattorin ominaisuuksia ja laske

a) $\sum_{i=1}^6 3x_i$ b) $\sum_{i=1}^6 (2x_i - 5)$ c) $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$ d) $\sum_{i=1}^6 (x_i - y_i)^2$
 e) $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})$ f) $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2$ g) $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

5. (jatkoa tehtävään 4)

Myöhemmin havaitaan, että toisen havaintoyksikön x -arvo ($= x_2$) ei olekaan 4 vaan -2 ja vastaavasti y -arvo ($= y_2$) on 4 eikä -2.

Laske kohdat a) - g) tämän korjauksen jälkeen

6. Esitä summana $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$.

7. a) Esitä Π -merkkiä käyttäen $4x_1 \cdot 4x_2 \cdot \dots \cdot 4x_7$. b) Laske $\prod_{i=1}^4 3^i$.

Vastauksia tehtäviin:

1: a) 25 b) 139 c) 625 d) 19 e) 125 f) 30 g) -55 h) -56 i) -6

4: a) 72 b) 18 c) 30 d) 150 e) 0 f) 58 g) -8

5: a) 54 b) 6 c) 30 d) 150 e) 0 f) 52 g) -20

7: b) 59049