Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 2 syksy 2011

1. On osoitettu, että $(M, +, \cdot)$, missä
$$M = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
on rengas. Olkoon
$$T = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Onko $(T, +, \cdot)$ renkaan $(M, +, \cdot)$ alirengas?

2. Onko $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ reaalilukujen renkaan $\mathbb{R}$ alirengas?

3. Olkoon $M = \{3x + 3yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että M on renkaan $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ideaali.

   Huomautus: Gaussin kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}[i]$ on määritelty luennoilla.

4. Osoita, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ideaali.

5. Olkoon $R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$. Tiedetään, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Olkoon $I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että I on renkaan R ideaali.

6. Olkoot I ja J ovat renkaan R ideaaleja. Osoita, että myös $I \cap J$ on renkaan R ideaali.

7. Tarkastellaan rengasta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ja sen ideaaleja $I = (12)$ ja $J = (21)$. Millainen ideaali on $I \cap J$?