

Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 3 syksy 2011

1. Määrää renkaan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ kaikki ideaalit. Mitkä näistä ideaaleista ovat maksimaalisia?
2. Olkoon $R = \{f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ ja olkoon sen epätyhjä osajoukko $A = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$. Tiedetään, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että A on renkaan $(R, +, \cdot)$ maksimaalinen ideaali.
3. On osoitettu, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ideaali. Määrää tekijärenkaan $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ alkiot ja laskutaulukot.
4. Olkoon $f: R \mapsto R'$ rengashomomorfismi ja olkoon S' renkaan (R', \oplus, \odot) alirengas. Osoita, että $f^{-1}(S')$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ alirengas.
5. Olkoon $f: R \mapsto R'$ rengashomomorfismi ja olkoon I renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaali. Osoita, että $f(I)$ on renkaan $(f(R), \oplus, \odot)$ ideaali.
6. Määrää kaikki rengashomomorfismit $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ ja $f: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$.