Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 4 syksy 2011

1. Olkoon $f\colon R \mapsto R'$ rengashomomorfismi ja olkoon S' renkaan $(R', \oplus, \odot)$ alirengas. Osoita, että $f^{-1}(S')$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ alirengas. (Sama tehtävä kuin edellisten harjoitusten tehtävä 4.)

2. Osoita, että rengashomomorfismi $f : R \mapsto R'$ on injektio jos ja vain jos $\operatorname{Ker}(f) = \{0_R\}$.

3. Olkoot
$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
ja
$$R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
Tiedetään, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ja $(R, +, \cdot)$ ovat renkaita. Osoita, että ne ovat isomorfiset.

4. On osoitettu (harjoituksen 1 tehtävä 2), että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on rengas, kun $a * b = a + b - 1$ ja $a \circ b = a + b - ab$. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on isomorfinen renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kanssa.

5. Olkoot
$$N = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$$
ja
$$I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}.$$
Tiedetään, että $(N, +, \cdot)$ on rengas ja I sen ideaali. Olkoon
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
Joukossa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yhteenlasku määritellään
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja kertolasku määritellään

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2).$$

Näin määriteltynä $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että tekijärengas $(N/I, +, \cdot)$ on isomorfinen renkaan $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ kanssa. (Vihje: Renkaiden homomorfialause.)

6. Osoita, että rengas $(S, +, \cdot)$, missä

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\},$$

on kokonaisalue.

7. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 = x$.