Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 5 syksy 2011

1. Osoita, että jokainen kunta on kokonaisalue.

2. Osoita, että jokainen äärellinen kokonaisalue on kunta.

3. Olkoon $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Tutki, onko $(E, +, \cdot)$ kunta.

4. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Näytä, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ei ole kunta.

5. Olkoon $N = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$. Tiedetään, että $(N, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että $(N, +, \cdot)$ on kunta.

6. Olkoon $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Osoita, että $(F, +, \cdot)$ on kunta.

7. Olkoot K äärellinen kunta ja $\operatorname{char} K = 2$. Osoita, että $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ aina, kun a ja b ovat kunnan K alkioita.

8. Olkoot K kunta, R rengas ja $f\colon K \mapsto R$ rengashomomorfismi. Osoita, että f on injektio.