

## Renkaat, kunnat ja polynomit

### Harjoitus 6 syksy 2011

1. On osoitettu, että  $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$  on renkaan  $\mathbb{Z}_{12}$  ideaali. Onko  $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$  kunta?
2. Määrää polynomien  $[2]x^2 + [1]x + [1]$  ja  $[4]x + [3]$  tulo renkaassa  $\mathbb{Z}_8[x]$ . Miksi Lause 4.1.4 ei päde?
3. Tutki polynomin  $[1]x^3 + [1]x^2 + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$  jaollisuutta.
4. Olkoon  $ax^3 + bx^2 + cx + d \in K[x]$  astetta kolme oleva jaoton polynomi ( $K$  on kunta). Osoita, että myös  $dx^3 + cx^2 + bx + a$  on jaoton polynomi.
5. Määrää kaikki astetta kaksi olevat jaottomat polynomit renkaassa  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
6. Jaa polynomi  $f(x) = [1]x^3 + [1]x^2 + [1]x + [1]$  tekijöihin renkaassa  $\mathbb{Z}_3[x]$ .
7. Olkoon  $f(x) \in K[x]$ . Oletetaan, että  $\deg f(x) = n$ . Osoita, että polynomilla  $f(x)$  on korkeintaan  $n$  nollakohtaa kunnassa  $K$ .
8. Ratkaise yhtälö  $[5]x^2 - [6]x + [1] = [0]$  kunnassa  $(\mathbb{Z}_{37}, +, \cdot)$ .
9. Jaa renkaassa  $\mathbb{Z}_5[x]$  polynomi  $[1]x^4 + [2]x^3 + [1]x + [2]$  polynomilla  $[2]x + [1]$ .