Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 7 syksy 2011

1. Olkoon I polynomirenkaan $(K[x], +, \cdot)$ ideaali. Osoita, että $I = (f(x))$, missä $f(x)$ on jokin pääpolynomi.

2. Osoita, että polynomi
$$p(x) = [1]x^3 + [1]x + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$$
on jaoton. Laajenna kunta $\mathbb{Z}_2$ kahdeksan alkion kunnaksi polynomin $p(x)$ avulla. Oletetaan, että tässä laajennuskunnassa $p(\alpha) = [0]$. Esitä laajennuskunnan nolla-alkiosta eroavat alkiot alkion α potensseina.

3. Osoita, että polynomi $p(x) = x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ on jaoton. Konstruoi laajennuskunta $\mathbb{R}[x]/(p(x))$. Minkä tutun kunnan sait laajennuskunnaksi?

4. Olkoot
$$f(x) = 5x^5 + 6x^3 + 3x^2 + x + 3$$
ja
$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$
polymirenkaan $\mathbb{Q}[x]$ polynomeja. Laske syt $(f(x), g(x))$.

5. Olkoot
$$f(x) = [2]x^4 + [2]x^3 + [3]x^2 + [1]x + [3]$$
ja
$$g(x) = [3]x^2 + [1]x + [1]$$
polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomeja. Osoita, että $f(x)$ ja $g(x)$ ovat keskenään jaottomia.

6. Oletetaan, että $q(x)$ ja $f(x)$ ovat keskenään jaottomia polynomeja, ja $q(x) \mid f(x)g(x)$. Osoita, että $q(x) \mid g(x)$.