

Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 1 syksy 2012

1. Osoita, että renkaan ykkösalkio eli multiplikatiivinen neutraali-alkio on yksikäsitteinen.
2. Olkoon $M = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että $(M, +, \cdot)$ on rengas, missä $(+)$ ja (\cdot) ovat matriisien yhteenlasku- ja kertolaskuoperaatiot. Onko kyseessä kommutatiivinen rengas?
3. Määritellään joukossa \mathbb{Z} laskutoimitukset $(*)$ ja (\circ) seuraavasti:

$$\begin{aligned}a * b &= a + b - 1, \\ a \circ b &= a + b - ab.\end{aligned}$$

Osoita, että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on kommutatiivinen rengas.

4. Olkoon $S = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että $(S, +, \cdot)$ on rengas. Onko kyseessä kommutatiivinen rengas? Onko $(S, +, \cdot)$ tehtävän 1 renkaan $(M, +, \cdot)$ alirengas?
5. Olkoon $(M, +, \cdot)$ kuten tehtävässä 1 ja olkoon

$$T = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Onko $(T, +, \cdot)$ renkaan $(M, +, \cdot)$ alirengas?

6. Rengasta R sanotaan Boolean renkaaksi, mikäli $x^2 = x$ aina, kun $x \in R$. Osoita, että Boolean rengas on kommutatiivinen.