

## Renkaat, kunnat ja polynomit

### Harjoitus 2 syksy 2012

1. Gaussin kokonaislukujen joukko on  $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ . Osoita, että  $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$  on rengas. (Huomaa, että alirengas on myös rengas.)
2. Olkoon  $M = \{3x + 3yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ . Osoita, että  $M$  on renkaan  $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$  ideaali.
3. Osoita, että  $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$  on renkaan  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  ideaali.
4. Olkoon  $R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$ . Tiedetään, että  $(R, +, \cdot)$  on rengas. Olkoon  $I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$ . Osoita, että  $I$  on renkaan  $R$  ideaali.
5. Olkoot  $I$  ja  $J$  ovat renkaan  $R$  ideaaleja. Osoita, että myös  $I \cap J$  on renkaan  $R$  ideaali.
6. Tarkastellaan rengasta  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ja sen ideaaleja  $I = (12)$  ja  $J = (21)$ . Millainen ideaali on  $I \cap J$ ?
7. Määrää renkaan  $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$  kaikki ideaalit. Mitkä näistä ideaaleista ovat maksimaalisia?