Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 3 syksy 2012

1. On osoitettu, että $I = \{[0],[3],[6],[9]\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ ideaali. Määrää tekijärenkaan $(\mathbb{Z}_{12}/I,+,\cdot)$ alkiot ja laskutaulukot.

2. Olkoon $f\colon R \mapsto R'$ rengashomomorfismi ja olkoon I renkaan $(R,+,\cdot)$ ideaali. Osoita, että $f(I)$ on renkaan $(f(R),\oplus,\odot)$ ideaali.

3. Määrää kaikki rengashomomorfismit $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ ja $f\colon \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$.

4. Osoita, että rengashomomorfismi $f : R \mapsto R'$ on injektio jos ja vain jos $\operatorname{Ker}(f) = \{0_R\}$.

5. Olkoot
$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
ja
$$R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
Tiedetään, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ ja $(R,+,\cdot)$ ovat renkaita. Osoita, että ne ovat isomorfiset.

6. On osoitettu (harjoituksen 1 tehtävä 2), että $(\mathbb{Z},*,\circ)$ on rengas, kun $a * b = a + b - 1$ ja $a \circ b = a + b - ab$. Osoita, että $(\mathbb{Z},*,\circ)$ on isomorfinen renkaan $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ kanssa.