Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 4 syksy 2012

1. Olkoot
$$N = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$$
ja
$$I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}.$$
Tiedetään, että $(N, +, \cdot)$ on rengas ja I sen ideaali. Olkoon
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
Joukossa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yhteenlasku määritellään
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
ja kertolasku määritellään
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2).$$
Näin määriteltynä $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että tekijärengas $(N/I, +, \cdot)$ on isomorfinen renkaan $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ kanssa. (Vihje: Renkaiden homomorfialause.)

2. Osoita, että rengas $(S, +, \cdot)$, missä
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\},$$
on kokonaisalue.

3. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 = x$.

4. Osoita, että jokainen kunta on kokonaisalue.

5. Osoita, että jokainen äärellinen kokonaisalue on kunta.

6. Olkoon $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Tutki, onko $(E, +, \cdot)$ kunta.

7. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Näytä, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ei ole kunta.

8. Olkoon $N = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$. Tiedetään, että $(N, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että $(N, +, \cdot)$ on kunta.