Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 5 syksy 2012

1. Olkoon $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Osoita, että $(F, +, \cdot)$ on kunta.

2. Olkoot K äärellinen kunta ja char $K = 2$. Osoita, että $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ aina, kun a ja b ovat kunnan K alkioita.

3. Olkoot K kunta, R rengas ja $f\colon K \mapsto R$ rengashomomorfismi. Osoita, että f on injektio.

4. On osoitettu, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ ideaali. Onko $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ kunta?

5. Määrää polynomien $[2]x^2 + [1]x + [1]$ ja $[4]x + [3]$ tulo renkaassa $\mathbb{Z}_8[x]$. Miksi Lause 4.1.4 ei päde?

6. Olkoon $f(x) \in K[x]$. Oletetaan, että $\deg f(x) = n$. Osoita, että polynomilla $f(x)$ on korkeintaan n erisuurta nollakohtaa kunnassa K.

7. Jaa renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomi $[1]x^4+[2]x^3+[1]x+[2]$ polynomilla $[2]x + [1]$.