

Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 6 syksy 2012

1. Tutki polynomin $[1]x^3 + [1]x^2 + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$ jaollisuutta.
2. Olkoon $ax^3 + bx^2 + cx + d \in K[x]$ astetta kolme oleva jaoton polynomi (K on kunta). Osoita, että myös $dx^3 + cx^2 + bx + a$ on jaoton polynomi.
3. Määrää kaikki astetta kaksi olevat jaottomat polynomit renkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$.
4. Jaa polynomi $f(x) = [1]x^3 + [1]x^2 + [1]x + [1]$ tekijöihin renkaassa $\mathbb{Z}_3[x]$.
5. Ratkaise yhtälö $[5]x^2 - [6]x + [1] = [0]$ kunnassa $(\mathbb{Z}_{37}, +, \cdot)$.
6. Olkoon I polynomirenkaan $(K[x], +, \cdot)$ ideaali. Osoita, että $I = (f(x))$, missä $f(x)$ on jokin pääpolynomi.
7. Osoita, että polynomi

$$p(x) = [1]x^3 + [1]x + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$$

on jaoton. Laajenna kunta \mathbb{Z}_2 kahdeksan alkion kunnaksi polynomin $p(x)$ avulla. Oletetaan, että tässä laajennuskunnassa $p(\alpha) = [0]$. Esitä laajennuskunnan nolla-alkiosta eroavat alkiot alkion α potensseina.